تمرين: لتكن A_1, A_2 جبري على K

ان $A_1 \times A_2 = B_1 \oplus B_2$

البرهان:

واضح ان $B_1 + B_2 \subseteq A_1 \times A_2$

$\forall (a,b) \in A_1 \times A_2$

$(a,b) = (a+0, b+0) = (a,0) + (0,b) \in B_1 + B_2$

$A_1 \times A_2 \subseteq B_1 + B_2$

$A_1 \times A_2 = B_1 + B_2$

$(a,b) \in B_1 \cap B_2$

$(a,b) \in B_1 \qquad b = 0$

$(a,b) \in B_2 \qquad a = 0 \quad \Rightarrow (a,b) = \{(0,0)\} = B_1 \cap B_2$

$A_1 \times A_2 = B_1 \oplus B_2$

وهو المطلوب

المتتاليات التامة:

تعريف: لتكن $\{A_i\}_{i \in I}$ اسرة من جبور لي فوق الحلقة R

ولتكن $\{f_i : A_i \longrightarrow A_{i+1}\}_{i \in I}$ اسرة من تشاكلات جبور لي

نسمي التركيب:

$A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+2} \longrightarrow$

متتالية من الجبور وتشاكلاتها.

ونقول عن المتتالية السابقة أنها تامة اذا تحقق الشرط:

$\ker(f_i) = \operatorname{Im}(f_{i-1}) \qquad \forall i \in I$

نتيجة:

من التعريف نتج ان

$\forall i \in I \qquad f_i \cdot f_{i-1} = 0$

تركيب دالتين

الموضوع: ....

تمهيدية :

ليكن $f: A \to B$ تشاكل حول :

1- المتتالية $0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B$

تامة $\Leftrightarrow$ f متباين

2- المتتالية $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{0} 0$ $\Leftrightarrow$ f غامر

البرهان:

1- نفرض المتتالية تامة عندئذ

$Ker f = Im(0) = 0$

ومنه f متباين

إذا كان f متباين فإن $Ker f = 0$

$Im(0) = 0$

$\Rightarrow Ker(f) = Im(0)$

الموضوع: ....

الفئات

تعريف: نقول أنه توجد لدينا فئة $\mathcal{L}$ إذا وجد

1- صف أشياء نرمز له $Ob(\mathcal{L})$

ونرمز لعناصره $A, B, D \dots$

2- صف مورفيزمات نرمز له $Mor(\mathcal{L})$

وتتألف من الأسهم $\forall A, B \in Ob(\mathcal{L}), A \longrightarrow B$

تحقق

1- أيا كان $A, B \in Ob(\mathcal{L})$ فإن $\mathcal{L}(A, B)$ مجموعة

2- أيا كان $A, B, D \in Ob(\mathcal{L})$ يوجد تطبيق

$$\mu : \mathcal{L}(A, B) \times \mathcal{L}(B, D) \longrightarrow \mathcal{L}(A, D)$$

بحيث

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(A, B) \times \mathcal{L}(B, D)$$

فإن

$$\mu(f, g) = g.f$$

ويسمى تركيب المورفيزمات.

$A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} D$, $A \xrightarrow{gf} D$

3- أيا كان $g : B \longrightarrow D$ ، $f : A \longrightarrow B$ ، $h : D \longrightarrow K$

مورفيزمات من $\mathcal{L}$ فإن

$$(h.g).f = h.(g.f)$$

4- أيا كان $A \in Ob(\mathcal{L})$ يوجد $I_A : A \to A$

يسمى المورفيزم المطابق ويحقق

$A \xrightarrow{I_A} A$, $A \xrightarrow{f} B$, $f.I_A = f$

$A \xrightarrow{I_A} A$, $B \xrightarrow{g} A$, $I_A.g = g$

$\forall f \in \mathcal{L}(A,B)\ ;\quad f \cdot I_A = f$

$\forall g \in \mathcal{L}(A,B)\ ;\quad I_A \cdot g = g$

5. إذا كان $A, A', B, B' \in ob(\mathcal{L})$ بحيث $(A,A') \neq (B,B')$

فإن

$$\mathcal{L}(A,A') \cap \mathcal{L}(B,B') = \emptyset$$

ملاحظة: لنفرض أن U هي كل المجموعات أي الكائنات
نفرض أن U مجموعة
لنأخذ في U العنصر A حيث

$$A = \{ B\ ;\ B \in U,\ B \notin B \}$$

$$A \in A \Rightarrow A \notin A$$
$$A \notin A \Rightarrow A \in A$$
⟸ تناقض، محال

إذا U ليست مجموعة بل صف

نتيجة: لتكن $\mathcal{L}$ صنفا و $A \in ob(\mathcal{L})$
المورفيزم المطابق I_A وحيد

البرهان:
لنفرض وجود مورفيزم مطابق آخر على A
وليكن I'_A

$$A \xrightarrow{I_A} A$$
$$\downarrow I'_A$$
$$A$$

إذا: $I'_A = I'_A \cdot I_A = I_A$

/ /

الموضوع:

* الفئة الثنوية:

لتكن $\mathcal{L}$ فئة

الفئة الثنوية للفئة $\mathcal{L}$ هي

الفئة $\mathcal{L}^{\circ}$ المؤلفة من

1- $ob(\mathcal{L}^{\circ}) = ob(\mathcal{L})$

2- من المورفيزمات ونحصل عليها من خلال [illegible] مورفيزمات الفئة $\mathcal{L}$ بعد عكس الاتجاهات

$\Leftarrow (\mathcal{L}^{\circ})^{\circ} = \mathcal{L}$

تعريف: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $u : A \to B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$ حيث $A, B \in ob(\mathcal{L})$

1- نقول عن المورفيزم u أنه مونومورفيزم إذا تحقق: $\forall X \in ob(\mathcal{L})$ فإن

$\alpha : \mathcal{L}(X,A) \to \mathcal{L}(X,B)$

المعرف بالشكل $\forall f \in \mathcal{L}(X,A)$;

$\alpha f = u.f$ متباين

$X \xrightarrow{f} A$, $u.f : X \to B$, $u : A \to B$

2- نقول عن المورفيزم u أنه إبيمورفيزم إذا تحقق الشرط:

$\forall X \in ob(\mathcal{L})$ فإن التطبيق $\beta : \mathcal{L}(A,X) \to \mathcal{L}(B,X)$

المعرف بالشكل $g \in \mathcal{L}(B,X)$

$\beta(g) = g.u$ متباين

$A \xrightarrow{u} B$, $g : B \to X$, $g.u : A \to X$

تمهيدية:

لتكن $\mathcal{L}$ فئة عندئذ

1- تركيب مونومورفيزمين هو مونومورفيزم

2- اذا كان $u, v \in Mor(\mathcal{L})$ وكان $u.v$ مونومورفيزم فان u مونومورفيزم

3- اذا كان $A \in ob(\mathcal{L})$ فان I_A مونومورفيزم

البرهان:

لتكن $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} D$ مونومورفيزمين للفئة $\mathcal{L}$

عندئذ اذا كان $X \in ob(\mathcal{L})$ فان التطبيق

$\alpha : \mathcal{L}(X, A) \longrightarrow \mathcal{L}(X, B)$

المعرف بالشكل $\alpha(\lambda) = f.\lambda$ متباين

وان التطبيق $\beta : \mathcal{L}(X,B) \longrightarrow \mathcal{L}(X,D)$

$\beta(\mu) = g\mu$ متباين

لنبرهن ان المونومورفيزم

$g.f : A \longrightarrow D$ مونومورفيزم

حسب التعريف لنبرهن ان

$\gamma : \mathcal{L}(X, A) \longrightarrow \mathcal{L}(X, D)$

المعرف بالشكل $\gamma(w) = (g.f)\, w$ متباين

لتكن $\exists w_1, w_2 \in \mathcal{L}(X,A)$ بحيث $\gamma(w_1) =$ ~~w_2~~ γw_2

~~$f w_1 = f w_2$~~

ومنه ~~$\alpha(w_1) = \alpha(w_2)$~~

~~$f w_1 = f w_2$~~

$(g.f)\, w_1 = (g.f)\, w_2$

$g(f.w_1) = g(f w_2)$

$X \to B$

ومنه $\beta(f.w_1) = \beta(f.w_2)$

الموضوع : ....

وبالتالي $f w_1 = f w_2$

$\alpha(w_1) = \alpha(w_2)$

لأن α متباين $w_1 = w_2$

لهذا لاتباين فإن $f.g$ مونومورفيزم

انتهت المحاضرة